

3.1.1 Vypočítajte limity funkcií:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 2x}, \\ \text{b)} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 4x}{2x^2 + 3x}, \\ \text{c)} \quad & \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3}{(x+1)^2}, \\ \text{d)} \quad & \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)^2(x-1)}{x^3 + 1}, \end{aligned}$$

3.1.2 Zistite, ktorá z daných funkcií je spojitá.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad f : y = & \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x+3}, & x \neq -3 \\ 6, & x = 3 \end{cases} \\ \text{b)} \quad f : y = & \begin{cases} \frac{x^3 - 4x}{x-2}, & x \neq 2 \\ 8, & x = 2 \end{cases} \\ \text{c)} \quad f : y = & \begin{cases} 3+x^2, & x \leq 0 \\ \frac{\sin 3x}{x}, & x > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

3.1.3 Určte parameter a tak, aby funkcia f bola spojitá:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad f : y = & \begin{cases} ax, & x < 1 \\ 2 - \frac{x}{a}, & x \geq 1, \end{cases} & \text{b)} \quad f : y = & \begin{cases} e^{ax}, & x < 0 \\ a - x, & x \geq 0, \end{cases} \\ \text{c)} \quad f : y = & \begin{cases} \frac{-1}{x^2 + a}, & x < 0 \\ \left(\frac{1}{3}\right)^x, & x \geq 0 \end{cases} & \text{d)} \quad f : y = & \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & x \leq -1 \\ x^2 + ax, & x > -1 \end{cases} \end{aligned}$$

3.1.4 Nájdite asymptoty grafu funkcie

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad f : y = & \frac{x}{x+4} & \text{f)} \quad f : y = xe^{\frac{1}{x^2}} \\ \text{b)} \quad f : y = & \frac{1-x^2}{x-2} & \text{g)} \quad f : y = 4xe^{-x^2} \\ \text{c)} \quad f : y = & \frac{2x^2}{2x-1} & \text{h)} \quad f : y = x + e^{-x} \\ \text{d)} \quad f : y = & 3x + \frac{3}{x-2} & \text{i)} \quad f : y = x + \frac{\ln x}{x} \end{aligned}$$

(2.2.4)

$$l) \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) \cdot [\ln(n+1) - \ln(n+2)] = \lim_{n \rightarrow \infty} [(n+1) \cdot \ln \frac{n+1}{n+2}] = \lim_{n \rightarrow \infty} [(n+1) \cdot \ln \left(\frac{n+2}{n+2} + \frac{-1}{n+2} \right)] =$$

Platí: $\log x + \log y = \log(x \cdot y)$
 $\log x - \log y = \log \left(\frac{x}{y} \right)$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left((n+1) \cdot \ln \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{n+2}{-1}} \right)^{\frac{n+2}{-1}} \right]^{\frac{1}{\frac{n+2}{-1}}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{-(n+1)}{n+2} \cdot \ln \underbrace{\left(1 + \frac{1}{\frac{n+2}{-1}} \right)^{\frac{n+2}{-1}}}_{\rightarrow e} \right) = -1 \cdot \ln e = -1 \cdot 1 = -1$$

$$\textcircled{*} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-(n+1)}{n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n-1}{n+2} \cdot \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1 - \left(\frac{1}{n} \right)^0}{1 + \left(\frac{2}{n} \right)} = \frac{-1}{1} = -1$$

(3.1.1)

$$a) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 2x}$$

ak máme limitu funkcie a x sa blíži k nejakému číslu (v tomto prípade $x \rightarrow 2$), tak vždy skusime najprv číslo dosadiť za x :

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 2x} \stackrel{?}{=} \frac{2^2 - 2 - 2}{2^2 - 2 \cdot 2} = \frac{0}{0} \rightarrow \text{nemá zmysel}$$

~ výslo nám $\frac{0}{0}$, čo je nesmysel.

Postupujeme teda tak, že čitatelia aj menovatelia upravíme na

Evar: $\frac{(x-a) \cdot \text{nieto}}{(x-a) \cdot \text{nieto}}$, kde a je číslo,

ke ktorému sa blíži x (u nás $a=2$):

[keby po dosadení výslo niečo pekné, teda nejaké číslo alebo $\pm \infty$, bol by to hnedý výsledok]

(21)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+1)}{x \cdot (x-2)} = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ \text{dosačitme}}} \frac{x+1}{x} = \frac{2+1}{2} = \underline{\underline{\frac{3}{2}}}$$

$$x^2 - x - 2: D = 1 + 4 \cdot 2 = 9$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{9}}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases} \Rightarrow x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$$

(30101)

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 4x}{2x^2 + 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot (x^2 - 4)}{x \cdot (2x+3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 4}{2x+3} = \frac{0^2 - 4}{2 \cdot 0 + 3} = \underline{\underline{\frac{-4}{3}}}$

c) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3}{(x+1)^2} = \frac{(-1)^3}{(-1+1)^2} = \frac{-1}{0} \Rightarrow \underline{\underline{\text{neexistuje}}}$

ak výjde $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $\frac{\pm\infty}{0}$, $\frac{0}{\pm\infty}$, $\frac{0}{0}$ → musíme rátať inak

ak výjde $\frac{\text{cislo}^{\neq 0}}{0}$ ⇒ $\underline{\underline{\text{limita}}}$

d) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)^2 \cdot (x-1)}{x^3 + 1} = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ \text{platí vztah: } x^3 + 1 = (x+1) \cdot (x^2 - x + 1)}} \frac{(x+1) \cdot (x+1) \cdot (x-1)}{(x+1) \cdot (x^2 - x + 1)} = \frac{(1+1) \cdot (-1-1)}{(-1)^2 - (-1) + 1} = \frac{0}{3} = \underline{\underline{0}}$

platí vztah: $x^3 + 1 = (x+1) \cdot (x^2 - x + 1)$

3.102

a) $f: y = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x+3} & x \neq -3 \\ 6 & x = -3 \end{cases}$ → je to zložené zapísaná funkcia a znamená:
 ak $x = -3$ tak $y = 6$
 inak $y = \frac{x^2-9}{x+3}$
 → či je funkcia spojiteľná zistime tak, že nájdeme limitu $\frac{x^2-9}{x+3}$ pre $x \rightarrow -3$
 a, zistime, či táto limita = 6. Ak áno, funkcia je spojiteľná. Inak nie je.
 tu je chyba v zadani, má tam byť $x = -3$

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2-9}{x+3} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x+3)(x-3)}{x+3} = \lim_{x \rightarrow -3} (x-3) = -3-3 = -6 \neq 6 \Rightarrow \text{funkcia nie je spojiteľná}$$

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

b) $f: y = \begin{cases} \frac{x^3-4x}{x-2} & x \neq 2 \\ 8 & x = 2 \end{cases}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-4x}{x-2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x^2-4)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x+2)}{1} = \\ &= 2 \cdot (2+2) = 8 \Rightarrow \text{funkcia je spojiteľná} \end{aligned}$$

c) $f: y = \begin{cases} 3+x^2 & x \leq 0 \\ \frac{\sin 3x}{x} & x > 0 \end{cases}$

dôkaz využec:
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

→ zistime, či $\lim_{x \rightarrow 0} (3+x^2) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (3+x^2) = 3+0^2 = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cdot \sin 3x}{3x} = 3 \cdot 1 = 3$$

limity sú rovnajú
 ⇒ funkcia je spojiteľná

(24)

3.103

a) $f: y = \begin{cases} ax & x < 1 \\ 2 - \frac{x}{a} & x \geq 1 \end{cases}$

musí platit: $\lim_{x \rightarrow 1^-} ax = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(2 - \frac{x}{a}\right)$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} ax = a \cdot 1 = a , \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(2 - \frac{x}{a}\right) = 2 - \frac{1}{a}$$

$$a = 2 - \frac{1}{a} / \cdot a$$

$$a^2 - 2a + 1 = 0$$

$$(a-1)^2 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{a=1}}$$

b) $f: y = \begin{cases} e^{ax} & x < 0 \\ a-x & x \geq 0 \end{cases}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{ax} = e^{a \cdot 0} = e^0 = 1 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} a=1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (a-x) = a-0 = a \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} a=1$$

c) $f: y = \begin{cases} \frac{-1}{x^2+a} & x < 0 \\ \left(\frac{1}{3}\right)^x & x \geq 0 \end{cases}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{x^2+a} = \frac{-1}{0+a} = -\frac{1}{a} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} -\frac{1}{a} = 1 / \cdot a$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{3}\right)^x = \left(\frac{1}{3}\right)^0 = 1 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} -1 = a \rightsquigarrow \underline{\underline{a=-1}}$$

d) $f: y = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & x \leq -1 \\ x^2+ax & x > -1 \end{cases}$

$$\lim_{x \rightarrow -1} e^{-\frac{1}{x}} = e^{-\frac{1}{-1}} = e^1 = e \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} e = 1-a$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} (x^2+ax) = (-1)^2 + a \cdot (-1) = 1 - a \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} a = 1-e$$

3.1.4

$$a) f: y = \frac{x}{x+4}$$

Máme 2 druhé asymptoty:

1. Asymptoty bez smernice:

$$\lim_{x \rightarrow a^{\pm}} f(x) = \pm\infty \Rightarrow \boxed{x=a} \text{ je as. bez sm. (ABS)}$$

→ limita sprava/zľava

2. Asymptoty so smernicou:

[existujúce pre $x \rightarrow \infty$ a pre $x \rightarrow -\infty$]

$$\text{ak } p = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \text{ a } q = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - p \cdot x]$$

$$\Rightarrow \boxed{y = px + q} \text{ je as. so sm. (ASS)}$$

ABS:

$$\lim_{x \rightarrow -4^-} \frac{x}{x+4} = -\infty \Rightarrow \boxed{x = -4} \text{ je ABS}$$

$$\lim_{x \rightarrow -4^+} \frac{x}{x+4} = \infty \Rightarrow \text{stačí zistiť jednu jednostrannú limitu (sprava alebo zľava) či je } \pm\infty$$

↓
 x sa blíži bodek nespojitosťi danej funkcie (zľava alebo sprava), t.j. bodu, pre ktorý nie je daná funkcia definovaná (v tomto prípade k -4, pretože $-4+4=0$ a to v menovateli nesmie byť)
 ~ limita sa rovná ∞ - zistíme vším jedno druhu tak, že za x dosadíme číslo, ktoré sa blíži k (-4) zľava, teda napr. $-3,999999999 \Rightarrow$ výjde obrovské záporné číslo a teda
 určite limita pôjde do $-\infty$ (neformálne zistovanie hodnoty limity): $\frac{-3,999...}{-3,999...+4} = \underline{-\infty}$

ASS:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{x+4}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x \cdot (x+4)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x+4} = 0 = p$$

$$q = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+4} - 0 \cdot x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x+4} \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{4}{x}} = \boxed{1 = q}$$

$y = 1$ je ASS (pre $\lim_{x \rightarrow \infty}$ výjdu $0 \cdot x + 1$)
 Nav q rovnakej

(26)

3.10.4

b) $f: y = \frac{1-x^2}{x-2}$

ABS: $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1-x^2}{x-2} = \frac{1-4}{1,999\dots - 2} = \frac{-3}{-0,00\dots 01} = \infty \Rightarrow x=2 \text{ je ABS}$

~~(je skončená funkcia)~~

toto si treba písat niekde naspäť
a zapísanie už len $\lim = \infty$

ASS: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1-x^2}{x-2}}{x} = \lim_{\infty} \frac{1-x^2}{x(x-2)} = \lim_{\infty} \frac{1-x^2}{x^2-2x} \cdot \frac{1}{x^2} = \lim_{\infty} \frac{\frac{1}{x^2}-1}{1-\frac{2}{x}} = \frac{\frac{1}{1^2}-1}{1-\frac{2}{1}} = \frac{-1}{1} = -1$

$$\begin{aligned} \lim_{\infty} \left(\frac{1-x^2}{x-2} + 1 \cdot x \right) &= \lim_{\infty} \left(\frac{1-x^2}{x-2} + x \right) = \lim_{\infty} \left(\frac{1-x^2+x \cdot (x-2)}{x-2} \right) = \lim_{\infty} \frac{1-x^2+x^2-2x}{x-2} = \\ &= \lim_{\infty} \frac{1-2x}{x-2} \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}-2}{1-\frac{2}{x}} = \frac{-2}{1} = -2 \end{aligned} \Rightarrow y = -x-2 \text{ je ASS}$$

c) $f: y = \frac{2x^2}{2x-1}$

ABS: $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{2x^2}{2x-1} = \frac{\frac{1}{2}}{0,00\dots 01} = \infty \Rightarrow x=\frac{1}{2} \text{ je ABS}$

ASS: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^2}{2x-1}}{x} = \lim_{\infty} \frac{2x}{x(2x-1)} = \lim_{\infty} \frac{2x}{2x-1} \cdot \frac{1}{x} = \lim_{\infty} \frac{2}{2-\frac{1}{x}} = 1$

$$\begin{aligned} \lim_{\infty} \left(\frac{2x^2}{2x-1} - 1 \cdot x \right) &= \lim_{\infty} \frac{2x^2-x(2x-1)}{2x-1} = \lim_{\infty} \frac{2x^2-2x^2+x}{2x-1} = \lim_{\infty} \frac{x}{2x-1} = \\ &= \lim_{\infty} \frac{1}{2-\frac{1}{x}} = \frac{1}{2} \end{aligned} \Rightarrow y = x + \frac{1}{2} \text{ je ASS}$$

[pre $\lim_{x \rightarrow \infty}$ rovnaké ako pre $\lim_{x \rightarrow \infty}$]

3.1.4

$$d) f: y = 3x + \frac{3}{x-2} = \frac{3x(x-2)+3}{x-2} = \frac{3x^2-6x+3}{x-2} = \frac{3 \cdot (x^2-2x+1)}{x-2} = \frac{3 \cdot (x-1)^2}{x-2}$$

→ s takýmto tvárom funkcie
sa mi bude ľahšie rútať

27

ABS:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3(x-1)^2}{x-2} = \frac{3}{0,00...01} = \infty \Rightarrow \underline{x=2 \text{ je ABS}}$$

ASS:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3(x-1)^2}{x-2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3(x-1)^2}{x(x-2)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2-6x+3}{x^2-2x} \cdot \frac{1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{6}{x} + \frac{3}{x^2}}{1 - \frac{2}{x}} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3(x-1)^2}{x-2} - 3 \cdot x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3(x-1)^2 - 3x(x-2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2-6x+3 - 3x^2+6x}{x-2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x-2} = 0$$

$\Rightarrow \underline{y = 3x \text{ je ASS [pre } \lim_{x \rightarrow \infty} \text{ rovnaké]}}$

$$f: y = x \cdot e^{\frac{1}{x^2}}$$

$$\text{ABS: } \lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot e^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\frac{1}{x^2}} \cdot e^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} \cdot e^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{1}{x} = \infty \cdot \infty = \infty \Rightarrow \underline{x=0 \text{ je ABS}}$$

platí: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \nexists$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x}{x} = \infty \text{ (ak } a > 1)$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{a^x} = 0 \text{ (ak } a > 1)$$

($e = 2,71828\dots$)

0^+ je skratený zápis pre
„nula sprava“, t.j.
pre $\lim_{x \rightarrow 0^+} x$

3.1.4

(28)

f) ASS: $\lim_{\infty} \frac{xe^{\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{\infty} e^{\left(\frac{1}{x^2}\right)^0} = e^0 = 1$

$$\lim_{\infty} (xe^{\frac{1}{x^2}} - 1 \cdot x) = \lim_{\infty} x \cdot (e^{\frac{1}{x^2}} - 1) = \lim_{\infty} \frac{e^{\frac{1}{x^2}} - 1}{\frac{1}{x^2}} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^0 = 1 \cdot 0 = 0$$

$y=x$ je ASS
[pre $\lim_{x \rightarrow \infty}$ rovnaké]

dôležitý výrok: $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1}$

my máme $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{1}{x^2}} - 1}{\frac{1}{x^2}}$ a platí: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = 0$

~~(28)~~
g)

ABS: za x môžeme dosať ľakšie ($D(f) = (-\infty; \infty)$) \Rightarrow ABS

ASS: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4xe^{-x^2}}{x} = \lim_{\infty} 4e^{-x^2} = 4 \cdot e^{-\infty} = \frac{4}{e^{\infty}} = \frac{4}{\infty} = 0$ [$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$]

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (4xe^{-x^2} - 0) = \lim_{\infty} 4xe^{-x^2} = \lim_{\infty} \frac{4x}{e^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{4x^2}{e^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{x} \cdot \frac{x^2}{e^{x^2}}$$

$= 0 \Rightarrow y=0$ je ASS [pre $\lim_{x \rightarrow \infty}$ rovnaké]

lebo $\lim_{\infty} \frac{x}{a^x} = 0$ pre $a > 1$

h) $f: y = x + e^{-x}$

ABS ? ($D(f) = (-\infty; \infty)$)

ASS: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + e^{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x} + \frac{e^{-x}}{x} \right) = \lim_{\infty} \left(1 + \left(\frac{1}{x \cdot e^x} \right)^0 \right) = 1$

$$\lim_{\infty} (x + e^{-x} - 1 \cdot x) = \lim_{\infty} e^{-x} = \lim_{\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

$y=x$ je ASS

(3.104) h) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{e^x}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{e^{-x}}{-x}\right) = 1 - \frac{e^\infty}{\infty} = 1 - \infty = -\infty \Rightarrow$ pre tento prípad $p = -\infty$

(29)

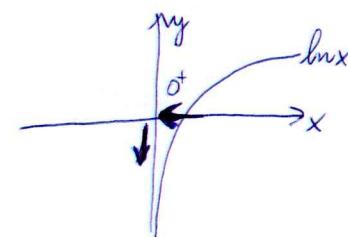
~ pokiaľ nám výsledok $p = \pm\infty$, v danom prípade ASS \nexists

~ \nexists teda iba jedna ASS: $y = x$ (pre $x \rightarrow \infty$)

~ na skúšku a na zároveň odporučam vyrátať ASS pre $x \rightarrow \infty$ aj pre $x \rightarrow -\infty$, pretože sa môže stať, že pre každý prípad výsledok iná asymptota

i) $f: y = x + \frac{\ln x}{x}$ ABS: $D(f) = (0, \infty)$, lebo $x \neq 0 \wedge x > 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x + \frac{\ln x}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x + \frac{1/x}{\ln x} \cdot \ln x\right) = \underbrace{x}_{0} + \underbrace{\frac{1}{x}}_{\infty} \cdot \underbrace{\ln x}_{-\infty} = -\infty \Rightarrow x=0 \text{ je ABS}$$



ak si pozrieme graf $\ln x$, vidime, že pre $x \rightarrow 0^+$ sa blíži graf do $-\infty$

ASS: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \frac{\ln x}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \frac{x^2 + \ln x}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \frac{x^2}{x} + \frac{\ln x}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\ln x}{x^2}\right) = 1$

[pre $\lim_{x \rightarrow \infty} p \nexists$, lebo $\lim_{x \rightarrow \infty} (\ln x) \nexists$]

platí: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x + \frac{\ln x}{x} - 1 \cdot x\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \Rightarrow y = x \text{ je ASS}$$