

Zadání assignmentu z matematiky

- A) Vysvětlete pojem určitého integrálu a jeho výpočet pomocí Leibniz-Newtonovy věty.
 B) Soubor úloh (nutnou podmínkou splnění semestrální práce je správný výpočet alespoň 16 ze zadaných 30 úloh).

- 1) Určete definiční obor funkce $y = \sqrt{\frac{x-1}{x}} - 2\ln x$. $D(f) \subset (1; \infty)$
 - 2) Načrtněte graf funkce $y = \ln(x-1) + 2$. posun o 1 doprava, o 2 nahoru
 - 3) Rozložte v \mathbb{R} polynom na součin kořenových činitelů $P(x) = x^4 - x^3 - 5x^2 - x - 6$. $(x+2) \cdot (x-3) \cdot (x^2+1)$
 - 4) Vypočtěte limitu $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3}{1-x}$.
 - 5) Vypočtěte limitu $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 2}{2x^3 - x + 3}$.
 - 6) Vypočtěte pomocí L'Hospitalova pravidla limitu $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\ln(1+2x)}$.
 - 7) Vypočtěte derivaci funkce $y = \frac{2\tg x - x^3}{1 - \sqrt{x}}$. $y' = \frac{(2\cos x - 3x^2)(1 - \sqrt{x}) - (2\sec^2 x - 3x^2)}{(1 - \sqrt{x})^2} \cdot \left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$
 - 8) Vypočtěte derivaci funkce $y = \sqrt{x + \sin(x^2)}$. $\frac{1 + 2x\cos(x^2)}{2\sqrt{x + \sin(x^2)}}$
 - 9) Vyšetřete intervaly monotónnosti a lokální extrémy funkce $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$.
 - 10) Vyšetřete intervaly konvexity a konkávity a inflexní body funkce $y = \frac{x^2}{x^2 - 1}$.
 - 11) Určete asymptoty grafu funkce $y = \frac{x^2 - 2x}{x + 2}$.
 - 12) Vyšetřete průběh funkce a načrtněte její graf $y = \frac{3}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 12x - 18$.
 - 13) Vyšetřete průběh funkce a načrtněte její graf $y = \frac{x^4 + 1}{x^2}$.
 - 14) Určete přibližné řešení rovnice $x^3 - 2x^2 - 3x - 2 = 0$ s přesností s přesností 0.07
 - 15) Vyjádřete danou funkci pomocí Taylorova polynomu stupně n v okolí bodu x_0 .
- $y = 2x + \cos 3x, x_0 = 0, n = 3$
- 16) Napište Lagrangeův interpolační polynom, procházející danými body.
- | | | | |
|--------|----|----|----|
| x | -2 | -1 | 3 |
| $f(x)$ | 1 | 2 | -2 |
- 17) Metodou nejmenších čtverců proložte přímku danými body a načrtněte obrázek.
 $(-5,3), (-4,2), (-3,1), (-2,0), (0,-2), (3,-2)$

18) Určete hodnotu determinantu dvěma způsoby rozvojem podle dvou různých řad.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & -5 & 3 \end{vmatrix} \quad |D| = -130$$

19) Určete matici X tak, aby platilo $X - 2AB = A + B$, jestliže $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$. $\begin{bmatrix} 15 & -4 & -8 \\ 11 & -1 & 4 \\ -2 & -12 & 2 \end{bmatrix}$

20) Určete hodnost matice

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 3 & -1 \\ 6 & 6 & 5 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & -1 \end{bmatrix} \quad h(A) = 4$$

21) Řešte soustavu lineárních rovnic

$$\begin{array}{rcl} x & + & 2y & + & z & = & 6 \\ 2x & - & y & + & z & = & 5 \\ x & - & y & - & z & = & 6 \end{array} \quad [5; 2; -3]$$

22) Řešte soustavu lineárních rovnic

$$\begin{array}{cccccc} 2x_1 & + x_2 & - x_3 & + 2x_4 & - 3x_5 & = 0 \\ x_1 & - 2x_2 & + x_3 & - x_4 & + x_5 & = 0 \\ 3x_1 & - 2x_2 & - x_3 & + x_4 & - 2x_5 & = 0 \\ 2x_1 & - 5x_2 & + x_3 & - 2x_4 & + 2x_5 & = 0 \end{array}$$

23) Vypočtěte neurčitý integrál $\int \frac{4}{\sqrt{2x+1}} dx - \int \frac{\sqrt{x+2}}{x} dx$.

24) Vypočtěte neurčitý integrál racionální lomené funkce $\int \frac{x^3 + x^2 + x + 1}{3x + 2} dx$.

25) Metodou per partes vypočtěte neurčitý integrál $\int x \cdot e^{3x} dx$. $\frac{1}{3} e^{3x} (x - \frac{1}{3})$

26) Substituční metodou vypočtěte neurčitý integrál $\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x}} dx$.

27) Vypočtěte obsah plochy, ohraničené křivkami $y = 2x^3$, $y^2 = 4x$.

28) Vypočtěte určitý integrál $\int_0^2 x^2 + \frac{2}{x+1} dx$. $\frac{8}{3} + \ln 9 = 4,863891244$

29) Vyšetřete průběh funkce a načrtněte její graf $y = \frac{x^2}{e^x}$.

30) Vypočtěte neurčitý integrál $\int \frac{x+8}{x^3+8} dx$.

④ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3}{1-x} = \frac{1^3}{1-1} = \frac{1}{0} \Rightarrow \underline{\text{limita neexistuje}}$

⑤ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^3-2}{2x^3-x+3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{3x^3}-\frac{2}{x^3}}{\cancel{2x^3}-\frac{x}{x^3}+\frac{3}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3-\frac{2}{x^3}}{2-\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x^3}} = \underline{\underline{\frac{3}{2}}}$

⑥ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x}-1}{\ln(1+2x)} \stackrel{LH}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot e^{2x}}{\frac{1}{1+2x} \cdot 2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x}}{\frac{1}{1+2x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} \cdot (1+2x)}{1} = \underline{\underline{\frac{e^0 \cdot (1+2 \cdot 0)}{1} = 1}}$

⑨ $f: y = \frac{x^2-2x+2}{x-1}$

$$y' = \frac{(2x-2)(x-1) - (x^2-2x+2) \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{2x^2-2x-2x+2 - x^2+2x-2}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$$

$$y' = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow \underline{x_1=0 \vee x_2=2}$$

$$y'' = \left(\frac{x^2-2x}{(x-1)^2} \right)' = \frac{(2x-2)(x-1)^2 - (x^2-2x) \cdot 2(x-1)}{[(x-1)^2]^2} = \frac{(2x-2)(x^2-2x+1) - (x^2-2x)(2x-2)}{(x-1)^4} =$$

$$= \frac{2x^3-4x^2+2x-2x^2+4x-2 - (2x^3-2x^2-4x^2+4x)}{(x-1)^4} = \textcircled{*}$$

$$\textcircled{X} = \frac{2x^3 - 6x^2 + 6x - 2 - 2x^3 + 2x^2 + 4x^2 - 4x}{(x-1)^4} = \frac{2x-2}{(x-1)^4} = \frac{2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{2}{(x-1)^3}$$

②

$$y''(x_1=0) = \frac{2}{(0-1)^3} = \frac{2}{-1} = -2 < 0 \Rightarrow \text{v bode } \underline{x=0} \text{ je lok. maximum}$$

\rightarrow jeho hodnota je $y(0) = \frac{0^2 - 2 \cdot 0 + 2}{0-1} = -2$

$$y''(x_2=2) = \frac{2}{(2-1)^3} = \frac{2}{1^3} = 2 > 0 \Rightarrow \text{v bode } \underline{x=2} \text{ je lok. minimum}$$

\rightarrow jeho hodnota je $y(2) = \frac{2^2 - 2 \cdot 2 + 2}{2-1} = 2$

~ Monotónnosť:

$$y' = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2} > 0 \Leftrightarrow x(x-2) > 0 \quad [\text{menovateľ je vždy kladný}]$$

\Updownarrow

$$(x > 0 \wedge x-2 > 0) \vee (x < 0 \wedge x-2 < 0)$$

$$(x > 0 \wedge x > 2) \vee (x < 0 \wedge x < 2)$$

$$(2; \infty) \cup (-\infty; 0)$$

\Rightarrow ZÁVER: funkcia rastie na $(-\infty; 0)$ a na $(2; \infty)$
klesá na $(0; 2)$

lok. max. má v bode $[0; -2]$

lok. min. má v bode $[2; 2]$

$$⑩ \quad f: y = \frac{x^2}{x^2 - 1}$$

$$y' = \frac{2x \cdot (x^2 - 1) - x^2 \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2x^3 - 2x - 2x^3}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-2x}{(x^2 - 1)^2}$$

$$\begin{aligned} y'' &= \left(\frac{-2x}{(x^2 - 1)^2} \right)' = \frac{-2 \cdot (x^2 - 1)^2 - (-2x) \cdot 2(x^2 - 1) \cdot 2x}{[(x^2 - 1)^2]^2} = \frac{-2 \cdot (x^4 - 2x^2 + 1) + 8x^2(x^2 - 1)}{(x^2 - 1)^4} = \\ &= \frac{-2x^4 + 4x^2 - 2 + 8x^4 - 8x^2}{(x^2 - 1)^4} = \frac{6x^4 - 4x^2 - 2}{(x^2 - 1)^4} \end{aligned}$$

$$y'' = 0 \Leftrightarrow \frac{6x^4 - 4x^2 - 2}{(x^2 - 1)^4} = 0 \Leftrightarrow 6x^4 - 4x^2 - 2 = 0 \quad | :2$$

$$3x^4 - 2x^2 - 1 = 0 ; \text{ subst.: } \boxed{x^2 = t}$$

$$3t^2 - 2t - 1 = 0$$

$$D = 4 - 4 \cdot 3 \cdot (-1) = 4 + 12 = 16$$

$$t_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 3} = \frac{2 \pm 4}{6} = \begin{cases} 1 \\ -\frac{1}{3} \end{cases}$$

spätná subst.:

$$x^2 = 1 \quad | \sqrt{} \quad \vee \quad x^2 = -\frac{1}{3}$$

$$|x| = 1$$

$$x = \pm 1$$

$$\emptyset$$

④

~ Inflexné body by teda mali byť v bodech $x = -1$ a $x = 1$. Oba tieto body sú ale body nespojitosťi, t.j. funkcia v nich nie je definovaná.

~ Konvexnosť, konkávnosť:

$$y'' > 0 \Leftrightarrow \frac{6x^4 - 4x^2 - 2}{(x^2 - 1)^4} > 0 \Leftrightarrow 6x^4 - 4x^2 - 2 > 0$$

[menovateľ je vždy kladný]

$$6x^4 - 4x^2 - 2 = \underbrace{6}_{>0}(x^2 - 1)\underbrace{(x^2 + \frac{1}{3})}_{>0} > 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 > 0$$

$$x^2 - 1 > 0 \quad |+1$$

$$x^2 > 1 \quad |\sqrt{}$$

$$|x| > 1 \Leftrightarrow \underline{x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)}$$

\Rightarrow funkcia nemá inflexné body

je konvexná na $(-\infty; -1)$ a na $(1; \infty)$

je konkávna na $(-1; 1)$

(11)

$$f: y = \frac{x^2 - 2x}{x+2}$$

$$x+2 \neq 0$$

$x \neq -2$ \Rightarrow asymptota bez smernice je $x = -2$

(5)

~ Asymptota so smernicou:

$$y = kx + q$$

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2 - 2x}{x+2}}{\frac{x}{1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x}{x(x+2)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(x-2)}{x(x+2)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-2}{x+2} \stackrel{1/x}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{2}{x} \stackrel{0}{\rightarrow}}{1 + \frac{2}{x} \stackrel{0}{\rightarrow}} = \frac{1}{1} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q &= \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 2x}{x+2} - 1 \cdot x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x - x(x+2)}{x+2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x - x^2 - 2x}{x+2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4x}{x+2} \stackrel{1/x}{=} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4}{1 + \frac{2}{x} \stackrel{0}{\rightarrow}} = -4 \end{aligned}$$

[obe limity vysledu rovnako aj v prípade pre $\lim_{x \rightarrow -\infty}$]

\Rightarrow asymptota so smernicou je $y = x - 4$

$$⑫ f: y = \frac{3}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 12x - 18$$

1) $D(f) = \mathbb{R}; H(f) = \mathbb{R}$

2) priesecné body: $\boxed{0x: y=0}$

$$\frac{3}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 12x - 18 = 0 \quad | :3$$

$$\frac{x^3}{2} + \frac{x^2}{2} - 4x - 6 = 0 \quad | \cdot 2$$

$$x^3 + x^2 - 8x - 12 = 0$$

$$(x+2)^2 \cdot (x-3) = 0$$

$$\boxed{x_1 = -2 \wedge x_2 = 3}$$

$\boxed{0y: x=0}$

$$y = \frac{3}{2} \cdot 0^3 + \frac{3}{2} \cdot 0^2 - 12 \cdot 0 - 18$$

$$\boxed{y = -18}$$

3) extremy: $y' = \frac{3}{2} \cdot 3x^2 + \frac{3}{2} \cdot 2x - 12 = \underbrace{\frac{9}{2}x^2 + 3x - 12}_{} = 0 \quad | :3$

$$\frac{3}{2}x^2 + x - 4 = 0 \quad | \cdot 2$$

$$3x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$D = 4 + 4 \cdot 3 \cdot 8 = 100$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{100}}{6} = \begin{cases} \frac{4}{3} \\ -2 \end{cases}$$

$$y'' = \left(\frac{9}{2}x^2 + 3x - 12\right)' = \frac{9}{2} \cdot 2x + 3 = \underline{9x + 3}$$

$$y''(x_1 = \frac{4}{3}) = 9 \cdot \frac{4}{3} + 3 = 15 > 0 \Rightarrow f. máv v bode \underline{x = \frac{4}{3}} \text{ lok. minimum}$$

$$\begin{aligned} y\left(\frac{4}{3}\right) &= \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^3 + \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2 - 12 \cdot \frac{4}{3} - 18 = \frac{3}{2} \cdot \frac{64}{27} + \frac{3}{2} \cdot \frac{16}{9} - 16 - 18 = \\ &= \frac{32}{9} + \frac{8}{3} - 34 = \frac{32+24}{9} - 34 = \frac{56}{9} - 34 = \frac{56-306}{9} = -\frac{250}{9} \end{aligned}$$

\Rightarrow lok. minimum je v bode $\left[\frac{4}{3}; -\frac{250}{9}\right]$,

$$y''(x_2 = -2) = 9 \cdot (-2) + 3 = -18 + 3 = -15 < 0 \Rightarrow f. máv v bode \underline{x = -2} \text{ lok. maximum}$$

$$y(-2) = \frac{3}{2} \cdot (-2)^3 + \frac{3}{2} \cdot (-2)^2 - 12 \cdot (-2) - 18 =$$

$$= \frac{3}{2} \cdot (-8) + \frac{3}{2} \cdot 4 + 24 - 18 = -12 + 6 + 24 - 18 = \\ = 0$$

\Rightarrow lok. maximum je v bode $[-2; 0]$,

4) monotónosť: $y' > 0 \Leftrightarrow \frac{9}{2}x^2 + 3x - 12 > 0 \Leftrightarrow \frac{9}{2} \cdot (x - \frac{4}{3}) \cdot (x + 2) > 0 / : \frac{9}{2}$

$$(x - \frac{4}{3})(x + 2) > 0$$

$$(x - \frac{4}{3} > 0 \wedge x + 2 > 0) \vee (x - \frac{4}{3} < 0 \wedge x + 2 < 0)$$

$$(x > \frac{4}{3} \wedge x > -2) \vee (x < \frac{4}{3} \wedge x < -2)$$

$$\left(\frac{4}{3}; \infty\right) \cup (-\infty; -2)$$

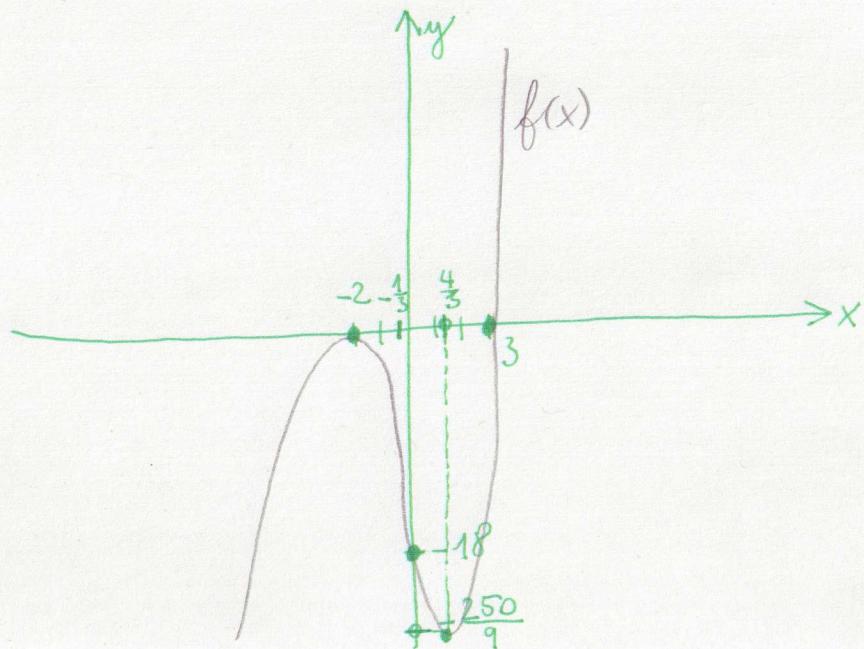
\Rightarrow na $(-\infty; -2)$ a na $(\frac{4}{3}; \infty)$ f. rastie
na $(-2; \frac{4}{3})$ f. klesá

5) konvexnosť, $y'' > 0 \Leftrightarrow 9x+3 > 0 \Leftrightarrow 9x > -3 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{3} \Leftrightarrow x > -\frac{1}{3}$
 konkávnosť.
 \Rightarrow na $(-\frac{1}{3}; \infty)$ je f. konvexná
 na $(-\infty; -\frac{1}{3})$ je f. konkávná

v bode $[-\frac{1}{3}; -\frac{125}{9}]$ má f. inflexný bod

$$\begin{aligned} y(-\frac{1}{3}) &= \frac{3}{2} \cdot (-\frac{1}{3})^3 + \frac{3}{2} \cdot (-\frac{1}{3})^2 - 12 \cdot (-\frac{1}{3}) - 18 = \frac{\frac{3}{2} \cdot -\frac{1}{27}}{9} + \frac{\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{9}}{3} + 4 - 18 = \\ &= \frac{-1}{18} + \frac{1}{6} - 14 = \frac{-1+3-252}{18} = \frac{-250}{18} = -\frac{125}{9} \end{aligned}$$

6) graf:



(9)

$$13) f: y = \frac{x^4 + 1}{x^2}$$

$$1) D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}; H(f) = (2; \infty)$$

asymptota bez smernice $x=0$

$$2) \text{priesečníky: } \boxed{o_x: y=0}$$

$$\frac{x^4 + 1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^4 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^4 = -1$$

\emptyset

priesečník s os. $x \nexists$

$$\boxed{o_y: x=0}$$

$$y = \frac{0^4 + 1}{0^2}$$

\emptyset

priesečník s os. $y \nexists$

3) extrémy:

$$y' = \frac{4x^3 \cdot x^2 - (x^4 + 1) \cdot 2x}{x^4} = \frac{4x^5 - 2x^5 - 2x}{x^4} = \frac{2x^5 - 2x}{x^4} = 0 \Leftrightarrow 2x^5 - 2x = 0$$

$$2x^5 - 2x = 0 \Leftrightarrow 2x(x^4 - 1) = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} x=0 \vee x^4 - 1 = 0 \\ x^4 = 1 \\ |x|=1 \\ x = \pm 1 \end{array} \right\} 0 \notin D(f) \Rightarrow \boxed{x_1 = -1 \wedge x_2 = 1}$$

$$y'' = \left(\frac{2x^5 - 2x}{x^4} \right)' = \frac{(10x^4 - 2) \cdot x^4 - (2x^5 - 2x) \cdot 4x^3}{x^8} = \frac{10x^8 - 2x^4 - 8x^8 + 8x^4}{x^8} =$$

$$= \frac{2x^8 + 6x^4}{x^8} = \frac{x^4 \cdot (2x^4 + 6)}{x^8} = \frac{\boxed{2x^4 + 6}}{x^4}$$

$$y''(x_1 = -1) = \frac{2 \cdot (-1)^4 + 6}{(-1)^4} = \frac{2+6}{1} = 8 > 0 \Rightarrow f. má v bode \underline{x = -1} \text{ lok. minimum}$$

$$y(-1) = \frac{(-1)^4 + 1}{(-1)^2} = \frac{1+1}{1} = 2$$

lok. minimum je v bode $[-1; 2]$,

$$y''(x_2 = 1) = \frac{2 \cdot 1^4 + 6}{1^4} = \frac{2+6}{1} = 8 > 0 \Rightarrow f. má v bode \underline{x = 1} \text{ lok. minimum}$$

$$y(1) = \frac{1^4 + 1}{1^2} = \frac{1+1}{1} = 2$$

lok. minimum je v bode $[1; 2]$,

4) monotónosť: $y' > 0 \Leftrightarrow \frac{2x^5 - 2x}{x^4} > 0 \Leftrightarrow 2x^5 - 2x > 0 \Leftrightarrow 2x(x^4 - 1) > 0 \mid :2$

$$x(x^4 - 1) > 0$$

$$(x > 0 \wedge x^4 - 1 > 0) \vee (x < 0 \wedge x^4 - 1 < 0)$$

$$(x > 0 \wedge |x| > 1) \vee (x < 0 \wedge |x| < 1)$$

$$(1; \infty) \cup (-1; 0)$$

\Rightarrow na $(-1; 0)$ a na $(1; \infty)$ rastie

na $(-\infty; -1)$ a na $(0; 1)$ klesá,

5) konvexnosť,

konkávnosť: $y'' > 0 \Leftrightarrow \frac{2x^4 + 6}{x^4} > 0 \Leftrightarrow 2x^4 + 6 > 0 \Leftrightarrow 2x^4 > -6 \Leftrightarrow x^4 > -3$
 toto platí vždy $\forall x \in \mathbb{R}$

\Rightarrow f. je konvexná na celom $D(f)$

inflexný bod \nexists .

6) sudosť, lichosť

(párnosť, nepárnosť):

$$f(x) = \frac{x^4 + 1}{x^2}$$

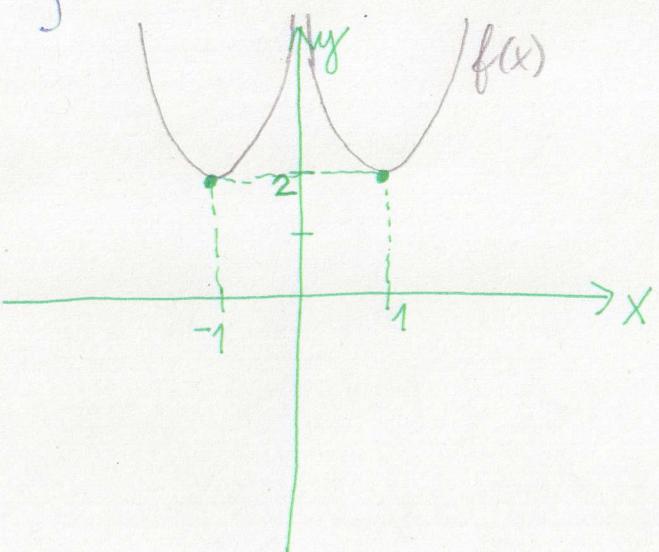
$$f(-x) = \frac{(-x)^4 + 1}{(-x)^2} = \frac{x^4 + 1}{x^2}$$

$$-f(x) = -\frac{x^4 + 1}{x^2}$$

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = f(-x) \quad \forall x \in D(f) \\ -f(x) = -f(-x) \end{array} \right\} \Rightarrow f. \text{ je sudá (párná)}$$

a teda symetrická
okolo Oy

7) graf:



(22)

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & -1 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & -5 & 1 & -2 & 2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{I} \leftrightarrow \text{II.}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & -5 & 1 & -2 & 2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{II}-2\text{I.}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & 4 & -5 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 4 & -5 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{III}-3\text{I.}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & 4 & -5 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{IV}-2\text{I.}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & 4 & -5 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{IV}.(-1)} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & 4 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

(12)

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 4 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{I}.(-2)} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 4 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{I}+3\cdot\text{II.}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 4 & -5 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_1 + 3x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ -8x_3 + 4x_4 - 5x_5 = 0 \end{array} \right\}$$

3 rovnice o 5 neznámých; nech $x_3 = s$

$$\underline{x_4 = t}$$

$$\begin{aligned} x_2 + x_3 &= 0 \\ \Rightarrow x_2 &= -x_3 \\ \underline{x_2 = -s} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -8x_3 + 4x_4 - 5x_5 &= 0 \\ -8s + 4t - 5x_5 &= 0 \quad | +5x_5 \end{aligned}$$

$$5x_5 = -8s + 4t \quad | :5$$

$$\boxed{x_5 = \frac{-8s + 4t}{5}}$$

$$x_1 + 3x_3 - x_4 + x_5 = 0$$

$$x_1 = -3x_3 + x_4 - x_5$$

$$\begin{aligned} x_1 &= -3s + t - \frac{-8s + 4t}{5} \\ x_1 &= \frac{-15s + 5t - (-8s + 4t)}{5} \\ x_1 &= \frac{-15s + 5t + 8s - 4t}{5} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{x_1 = \frac{-7s + t}{5}}$$

$$\Rightarrow \left\{ \left[\frac{-7s+t}{5}; -s; s; t; \frac{-8s+4t}{5} \right]; s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

(13)

$$(23) \quad \int \frac{4}{\sqrt{2x+1}} dx - \int \frac{\sqrt{x^7+2}}{x} dx = \otimes$$

$$\int \frac{4}{\sqrt{2x+1}} dx = \begin{vmatrix} 2x+1=t \\ 2dx=dt \end{vmatrix} = 2 \cdot \int \frac{1}{\sqrt{t}} dt = 2 \cdot \int t^{-\frac{1}{2}} dt = 2 \cdot \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = 4\sqrt{t} + c = 4\sqrt{2x+1} + c,$$

$$\int \frac{\sqrt{x^7+2}}{x} dx = \int \frac{\sqrt{x}}{x} dx + \int \frac{2}{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}-1} dx + 2 \cdot \int \frac{1}{x} dx = \int x^{-\frac{1}{2}} dx + 2 \cdot \int x^{-1} dx =$$

$$= \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + 2 \cdot \ln|x| + c = 2\sqrt{x} + 2\ln|x| + c,$$

$$\otimes = 4\sqrt{2x+1} - (2\sqrt{x} + 2\ln|x|) + c = 4\sqrt{2x+1} - 2\sqrt{x} - 2\ln|x| + c; c \in \mathbb{R}$$

(24)

$$\int \frac{x^3 + x^2 + x + 1}{3x+2} dx = \int \frac{x \cdot (x+1) + x+1}{3x+2} dx = \int \frac{(x+1)(x^2+1)}{3x+2} dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} 3x+2 = t \quad \leftrightarrow \quad 3dx = dt \\ 3x = t-2 \quad \quad \quad dx = \frac{dt}{3} \\ x = \frac{t-2}{3} \end{array} \right| = \int \frac{\left(\frac{t-2}{3}+1\right)\left(\left(\frac{t-2}{3}\right)^2+1\right)}{t} \frac{dt}{3} =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \int \frac{\left(\frac{t-2+3}{3}\right)\left(\frac{t^2-4t+4+9}{9}\right)}{t} dt = \frac{1}{3} \cdot \int \frac{\left(\frac{t+1}{3}\right)\left(\frac{t^2-4t+13}{9}\right)}{t} dt =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \int \frac{\frac{t+1}{3}}{\frac{t}{1}} \cdot \left(\frac{t^2-4t+13}{9}\right) dt = \frac{1}{3} \cdot \int \left(\frac{t+1}{3t} \cdot \frac{t^2-4t+13}{9}\right) dt = \frac{1}{81} \cdot \int \frac{t+1}{t} \cdot (t^2-4t+13) dt$$

$$= \frac{1}{81} \cdot \int \frac{t^3-4t^2+13t+t^2-4t+13}{t} dt = \frac{1}{81} \cdot \int \frac{t^3-3t^2+9t+13}{t} dt =$$

$$= \frac{1}{81} \cdot \int \left(\frac{t^3}{t} - \frac{3t^2}{t} + \frac{9t}{t} + \frac{13}{t} \right) dt = \frac{1}{81} \cdot \left[\int (t^2-3t+9) dt + 13 \cdot \int \frac{1}{t} dt \right] =$$

$$= \frac{1}{81} \cdot \left[\frac{t^3}{3} - 3 \cdot \frac{t^2}{2} + 9t + 13 \ln |t| \right] + C = \frac{1}{81} \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot (3x+2)^3 - \frac{3}{2} \cdot (3x+2)^2 + 9 \cdot (3x+2) + 13 \cdot \ln |3x+2| \right] + C; C \in \mathbb{R}$$

(14)

$$\begin{aligned}
 \textcircled{26} \quad & \int \frac{x^2}{\sqrt{4-x}} dx = \left| \begin{array}{l} 4-x=t \\ -dx=dt \\ dx=-dt \end{array} \right| = - \int \frac{(4-t)^2}{\sqrt{t}} dt = - \int \frac{16-8t+t^2}{\sqrt{t}} dt = \\
 & = - \left(\int \frac{16}{\sqrt{t}} dt - \int \frac{8t}{\sqrt{t}} dt + \int \frac{t^2}{\sqrt{t}} dt \right) = -16 \int t^{-\frac{1}{2}} dt + 8 \int t^{\frac{1}{2}} dt - \int t^{\frac{3}{2}} dt = \\
 & = -16 \cdot \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + 8 \cdot \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{t^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + C = -32 \sqrt{4-x} + \frac{16}{3} \sqrt{(4-x)^3} - \frac{2}{5} \sqrt{(4-x)^5} + C, \\
 & \qquad \qquad \qquad \text{c} \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{27} \quad & y = 2x^3 \\
 & y^2 = 4x \Leftrightarrow y = \sqrt{4x} \Leftrightarrow y = 2\sqrt{x} \\
 & \int_0^1 (2\sqrt{x} - 2x^3) dx = 2 \int_0^1 x^{\frac{1}{2}} dx - 2 \int_0^1 x^3 dx = \\
 & = 2 \cdot \left(\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 \right) = 2 \cdot \left(\left[\frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{1}{4}x^4 \right]_0^1 \right) = \\
 & = 2 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \sqrt{1^3} - \frac{1}{4} \cdot 1^4 - \frac{2}{3} \sqrt{0^3} + \frac{1}{4} \cdot 0^4 \right) = \\
 & = 2 \cdot \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4} \right) = 2 \cdot \frac{8-3}{12} = 2 \cdot \frac{5}{12} = \underline{\underline{\frac{5}{6}}} \\
 & \qquad \qquad \qquad \text{graf: } y = 2x^3 \text{ a } y = 2\sqrt{x} \text{ v oblasti } [0,1]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2x^3 &= 2\sqrt{x} \quad | :2 \\
 x^3 &= \sqrt{x} \quad |^2 \\
 x^6 &= x \quad | -x \\
 x^6 - x &= 0 \\
 x(x^5 - 1) &= 0 \Leftrightarrow \boxed{x=0} \vee \boxed{x=1} \quad \boxed{x=1}
 \end{aligned}$$

hranice
integrálu