

Zadání zápočtové práce číslo 1016

A. Lineární programování

Řešte graficky úlohu lineárního programování. Výsledek ověřte užitím řešitele excelu.

$$f_{\max} = 600x + 400y$$

$$8x + 2y \leq 24$$

$$x + 4y \leq 12$$

$$4x + 4y \leq 16$$

B. 1. Vyřešte soustavu lineárních rovnic

$$x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 3$$

$$2x_1 + x_3 + x_4 + 4x_5 = 15$$

$$x_2 - 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 5$$

$$x_3 + x_5 = 9$$

$$x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 2$$

2. Pro zadanou soustavu lineárních rovnic byl použitím vhodného software získán výsledek zapsaný ve tvaru trojúhelníkové matice. Interpretujte tento výsledek. (V případě existence řešení vypište výsledek, v opačném případě prokažte nekorektnost zadání.)

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -3$$

$$x_1 - x_2 - x_4 = -4 \quad \text{počítačové řešení:}$$

$$x_2 - x_3 + x_4 = 5$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

C. Určete definiční obor funkcí

$$f(x) = \frac{x+1}{2 \sin x - 1}, \quad f(x) = \log(3 - 2x - x^2)$$

D. Vypočtěte limity funkcí

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{x^2 - 3}{x^4 + x^2 + 1}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2x}{x^2(1-x)}$$

Zadání zápočtové práce číslo 2016

A. 1. Užití derivace (dílčí úloha)

Určete rovnice tečen ke křivce $y = 4x - x^2$ v jejich průsečících s osou x . Sestrojte graf této situace.

2. Proved'te komplexní rozbor průběhu funkce

$$y = \frac{1 + x + x^2}{1 - x + x^2}.$$

B. 1. Výpočet neurčitého integrálu.

Při řešení použijte některé z následujících metod: rozklad integrandu na tabulkový tvar, metoda per partes, substituční metoda.

$$\int \frac{dx}{\cos 2x + \sin^2 x} \quad \int x \ln^2 x \, dx \quad \int \frac{4x + 3}{(x - 2)^3} \, dx$$

2. Aplikace určitého integrálu

Určete obsah rovinné oblasti ohraničené čarami $y = x^3$, $y = 8$, $x = 0$.

$$x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 = 3$$

$$2x_1 + x_3 + x_4 + 4x_5 = 15$$

$$x_2 - 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 5$$

$$x_3 + x_5 = 9$$

$$x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 2$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 4 & 15 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 9 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \text{II} \cdot 2 \cdot \text{I} \\ \text{V} \cdot \text{I} \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & -3 & 3 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 2 & -3 & 2 & -1 & -1 \end{array} \right) \sim$$

tu chceme nulky pomocou 1. riadka

$$\begin{array}{l} \sim \\ \text{II} \cdot 3 \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 2 & -3 & 2 & -1 & -1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ \text{2} \cdot \text{III} - \text{II} \\ \text{V} - \text{II} \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & 3 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -1 & -4 \end{array} \right) \sim$$

tu chceme nulky pomocou 2. r.

$$\begin{array}{l} \sim \\ \text{III} \leftrightarrow \text{IV} \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & -5 & 3 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -1 & -4 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ \text{IV} + 5 \cdot \text{III} \\ \text{V} + 2 \cdot \text{III} \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 7 & 52 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 14 \end{array} \right) \sim$$

tu chceme nulky pomocou 3. r.

$$\begin{array}{l} \sim \\ \text{IV} \leftrightarrow \text{V} \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{3} & 7 & 52 \end{array} \right) \quad \text{IV} - 3 \cdot \text{IV} \quad \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 10 \end{array} \right)$$

↓
tu chceme nulu pomocou 4. r.

$$\Rightarrow 4x_5 = 10 \quad | :4$$

$$\boxed{x_5 = \frac{5}{2}}$$

$$\rightsquigarrow \begin{array}{l} x_4 + x_5 = 14 \\ x_4 + \frac{5}{2} = 14 \quad | -\frac{5}{2} \\ x_4 = 14 - \frac{5}{2} \\ \boxed{x_4 = \frac{23}{2}} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x_3 + x_5 = 9 \\ x_3 + \frac{5}{2} = 9 \quad | -\frac{5}{2} \\ x_3 = 9 - \frac{5}{2} \\ \boxed{x_3 = \frac{13}{2}} \end{array}$$

$$2x_2 - x_3 + x_4 = 3$$

$$2x_2 - \frac{13}{2} + \frac{23}{2} = 3$$

$$2x_2 + \frac{23-13}{2} = 3$$

$$2x_2 + 5 = 3 \quad | -5$$

$$2x_2 = -2 \quad | :2$$

$$\boxed{x_2 = -1}$$

$$x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 3$$

$$x_1 - 3 \cdot (-1) + 2 \cdot \frac{13}{2} - \frac{23}{2} + 2 \cdot \frac{5}{2} = 3$$

$$x_1 + 3 + 13 - \frac{23}{2} + 5 = 3$$

$$x_1 + 21 - \frac{23}{2} = 3$$

$$x_1 + \frac{19}{2} = 3 \quad | -\frac{19}{2}$$

$$x_1 = 3 - \frac{19}{2}$$

$$\boxed{x_1 = -\frac{13}{2}}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\left[-\frac{13}{2}; -1; \frac{13}{2}; \frac{23}{2}; \frac{5}{2} \right]}}$$

1016 B2

5

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{l} x_1 = -2 \\ x_2 + x_4 = 2 \\ x_3 = -3 \end{array}$$

\downarrow x_4 označím ako
nejaký parameter t

$$\leadsto x_2 + t = 2 \quad | -t$$

$$\underline{x_2 = 2 - t}$$

$$\underline{x_4 = t}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\{[-2; 2-t; -3; t]; t \in \mathbb{R}\}}}$$

1016 C

6

$$a) f(x) = \frac{x+1}{2\sin x - 1}$$

$D(f)$: menovateľ sa nesmie rovnáť 0

$$2\sin x - 1 \neq 0 \quad | +1$$

$$2\sin x \neq 1 \quad | :2$$

$$\sin x \neq \frac{1}{2}$$

$$x \neq \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

$$x \neq \frac{5}{6}\pi + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{D(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{5}{6}\pi + 2k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}}}$$

všetky reálne čísla okrem
danej množiny čísel v zátvorke

1016 c)

b) $f(x) = \log(3 - 2x - x^2)$

$D(f)$: logaritmovat sa dajú len kladné čísla

$$3 - 2x - x^2 > 0 \quad | \cdot (-1)$$

$$x^2 + 2x - 3 < 0$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm 4}{2} = \begin{cases} -3 \\ 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x-1)(x+3) < 0$$

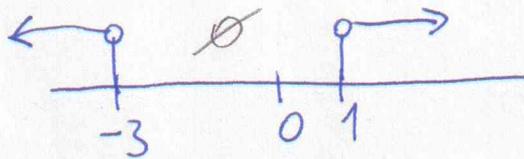
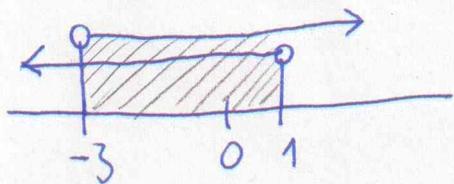
7

$$(x-1) \cdot (x+3) < 0$$

súčin dvoch čísel je záporný, ak majú dané čísla vzájomne opačné znamienka:

$$(x-1 < 0 \wedge x+3 > 0) \vee (x-1 > 0 \wedge x+3 < 0)$$

$$(x < 1 \wedge x > -3) \vee (x > 1 \wedge x < -3)$$



$$\Rightarrow \underline{\underline{D(f) = (-3; 1)}}$$

8

$$a) \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{x^2 - 3}{x^4 + x^2 + 1} = \frac{(\sqrt{3})^2 - 3}{(\sqrt{3})^4 + (\sqrt{3})^2 + 1} = \frac{3 - 3}{9 + 3 + 1} = \frac{0}{13} = \underline{\underline{0}}$$

po dosadení $\sqrt{3}$ do výrazu priamo vyšiel výsledok

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2x}{x^2 \cdot (1-x)}$ \rightarrow po dosadení 0 do čitateľa aj menovateľa dostávam $\frac{0}{0}$ a teda neviem priamo dosadením získať výsledok;
využijem teda L'Hospitalovo pravidlo:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f}{g} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'}{g'} \quad (\text{limita podielu funkcií} = \text{limite podielu derivácií})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2x}{x^2 \cdot (1-x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2x}{x^2 - x^3} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin^2 2x)'}{(x^2 - x^3)'} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 2x \cdot \cos 2x \cdot 2}{2x - 3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \sin 2x \cdot \cos 2x}{2x - 3x^2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 4x}{2x - 3x^2}$$

využil som vzorec $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$;
po dosadení 0 dostávam znova $\frac{0}{0}$
a teda znova využijem L'Hospitala:

$$\stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2 \sin 4x)'}{(2x - 3x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos 4x \cdot 4}{2 - 6x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8 \cos 4x}{2 - 6x} =$$

$$= \frac{8 \cdot \cos 0}{2 - 0} = \frac{8 \cdot 1}{2} = \underline{\underline{4}}$$

$$y = 4x - x^2$$

každý priesečník s osou x má y-ovú súradnicu 0
⇒ zistím si najprv priesečníky a to tak, že položím $y = 0$

$$4x - x^2 = 0$$

$$x \cdot (4 - x) = 0 \Leftrightarrow \underline{x_0 = 0} \vee \begin{array}{l} 4 - x = 0 \quad | -4 \\ -x = -4 \quad | \cdot (-1) \\ \text{~~x = 4~~} \\ \underline{x_0 = 4} \end{array}$$

⇒ priesečníky grafu funkcie s osou x sú:

$$\underline{[0; 0] \text{ a } [4; 0]}$$

v týchto priesečníkoch rátam rovnice dotyčníc (tečen)

rovnica dotyčnice ku grafu funkcie v bode $[x_0; f(x_0)]$:

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

$[0; 0]$:

$$y' = (4x - x^2)' = \underline{4 - 2x}$$

$$y'(0) = 4 - 2 \cdot 0 = 4$$

$$y(0) = 0$$

$$\Rightarrow y = 4 \cdot (x - 0) + 0$$

$$\underline{\underline{y = 4x}}$$

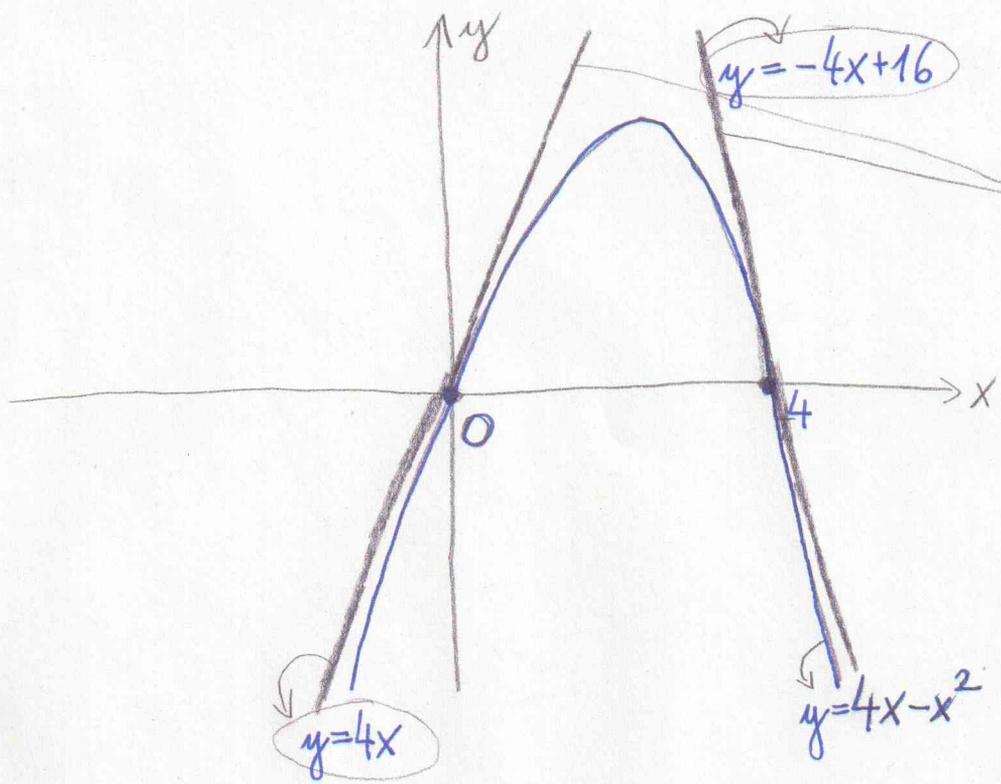
$[4; 0]$:

$$y'(4) = 4 - 2 \cdot 4 = -4$$

$$y(4) = 0$$

$$\Rightarrow y = -4 \cdot (x - 4) + 0 = -4x + 16$$

$$\underline{\underline{y = -4x + 16}}$$



těčny v
přesečnicích
s osou x

$$f: y = \frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$$

$$D(f): 1-x+x^2 \neq 0$$

$$x^2-x+1 \neq 0$$

$$D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 1 - 4 = -3$$

$D = -3 < 0 \Rightarrow$ nemá korene,
t.j. $1-x+x^2 \neq 0$ nikdy

$$\Rightarrow \underline{D(f) = \mathbb{R} = (-\infty; \infty)}$$

sudost / lichost:

funkcia je sudá, ak $f(x) = f(-x) \quad \forall x \in D(f)$

funkcia je lichá, ak $-f(x) = f(-x) \quad \forall x \in D(f)$

$$f(x) = \frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$$

$$-f(x) = -\frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$$

$$f(x) = \frac{1-x+(-x)^2}{1+x+(-x)^2} = \frac{1-x+x^2}{1+x+x^2}$$

$\left. \begin{array}{l} f(x) \neq f(-x) \\ -f(x) \neq f(-x) \end{array} \right\} \Rightarrow$ funkcia nie je sudá ani lichá

priesečníky s osami:

$$\sigma_x: y=0$$

$$\frac{1+x+x^2}{1-x+x^2} = 0$$

\Updownarrow

$$1+x+x^2=0$$

$$x^2+x+1=0$$

$$D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3$$

$D < 0 \Rightarrow$ priesečník s osou x \nexists

(neexistuje)

$$\sigma_y: x=0$$

$$y = \frac{1+0+0^2}{1-0+0^2}$$

$$\underline{y_0 = 1}$$

ABS \nexists , pretože menovateľ $\neq 0$ nikdy a pretože $D(f) = \mathbb{R}$
asymptota bez smernice neexistuje, lebo $1-x+x^2 \neq 0$

16

ASS:

asymptota so smernicou má vždy tvar $y = k \cdot x + q$, kde

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{a} \quad q = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - k \cdot x)$$

k, q musia byť reálne čísla

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1+x+x^2}{1-x+x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1+x+x^2 \quad | :x^3}{x-x^2+x^3 \quad | :x^3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + 1} = \frac{0+0+0}{0-0+1} = \frac{0}{1} = \underline{\underline{0}} \end{aligned}$$

$$q = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - k \cdot x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{1+x+x^2}{1-x+x^2} - 0 \cdot x \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1+x+x^2 \quad | :x^2}{1-x+x^2 \quad | :x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1}{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + 1} = \frac{0+0+1}{0-0+1} =$$

$$= \frac{1}{1} = \underline{\underline{1}}$$

\Rightarrow ASS je $y = 0 \cdot x + 1$
 $y = 1$

17

18

$$y' = \left(\frac{1+x+x^2}{1-x+x^2} \right)' = \frac{(1+2x)(1-x+x^2) - (1+x+x^2)(-1+2x)}{(1-x+x^2)^2} =$$

$$= \frac{1-x+x^2+2x-2x^2+2x^3 - (-1+2x-x+2x^2-x^2+2x^3)}{(1-x+x^2)^2} =$$

$$= \frac{1+x-x^2+2x^3 - (-1+x+x^2+2x^3)}{(1-x+x^2)^2} =$$

$$= \frac{1+x-x^2+2x^3 + 1-x-x^2-2x^3}{(1-x+x^2)^2} = \frac{2-2x^2}{(1-x+x^2)^2}$$

stacionárne body

$$y' = 0 \Leftrightarrow \frac{2-2x^2}{(1-x+x^2)^2} = 0 \Leftrightarrow 2-2x^2 = 0 \quad | :2$$

$$1-x^2 = 0$$

$$x^2 = 1 \Rightarrow \underline{\underline{x_0 = -1 \wedge x_0 = 1}}$$

19

$$y' > 0 \Leftrightarrow \frac{2-2x^2}{(1-x+x^2)^2} > 0 \Leftrightarrow 2-2x^2 > 0$$

↳ menovateľ je > 0 vždy, lebo je umocnený na druhú

$$2-2x^2 > 0 \quad | :2$$

$$1-x^2 > 0 \quad | -1$$

$$-x^2 > -1 \quad | \cdot (-1)$$

$$x^2 < 1 \Rightarrow x \in (-1; 1)$$

⇒ funkcia na $(-1; 1)$ rastie

na $\underline{\underline{(-\infty; -1) \cup (1; \infty)}}$ klesá (kde nerastie, klesá)

$$y'' = \left(\frac{2-2x^2}{(1-x+x^2)^2} \right)' = \frac{-4x \cdot (1-x+x^2)^2 - (2-2x^2) \cdot 2 \cdot (1-x+x^2) \cdot (-1+2x)}{(1-x+x^2)^4} =$$

$$= \frac{(1-x+x^2) \cdot [-4x \cdot (1-x+x^2) - 2 \cdot (2-2x^2) \cdot (-1+2x)]}{(1-x+x^2)^4} =$$

$$= \frac{-4x + 4x^2 - 4x^3 - 2 \cdot (-2 + 4x + 2x^2 - 4x^3)}{(1-x+x^2)^3} =$$

$$= \frac{-4x + 4x^2 - 4x^3 + 4 - 8x - 4x^2 + 8x^3}{(1-x+x^2)^3} =$$

$$= \frac{4x^3 - 12x + 4}{(1-x+x^2)^3}$$

$$y''(-1) = \frac{4 \cdot (-1)^3 - 12 \cdot (-1) + 4}{(1 - (-1) + (-1)^2)^3} = \frac{-4 + 12 + 4}{(1 + 1 + 1)^3} = \frac{12}{27} > 0$$

⇒ funkcia má v stac. bode $x_0 = -1$ lokálne minimum

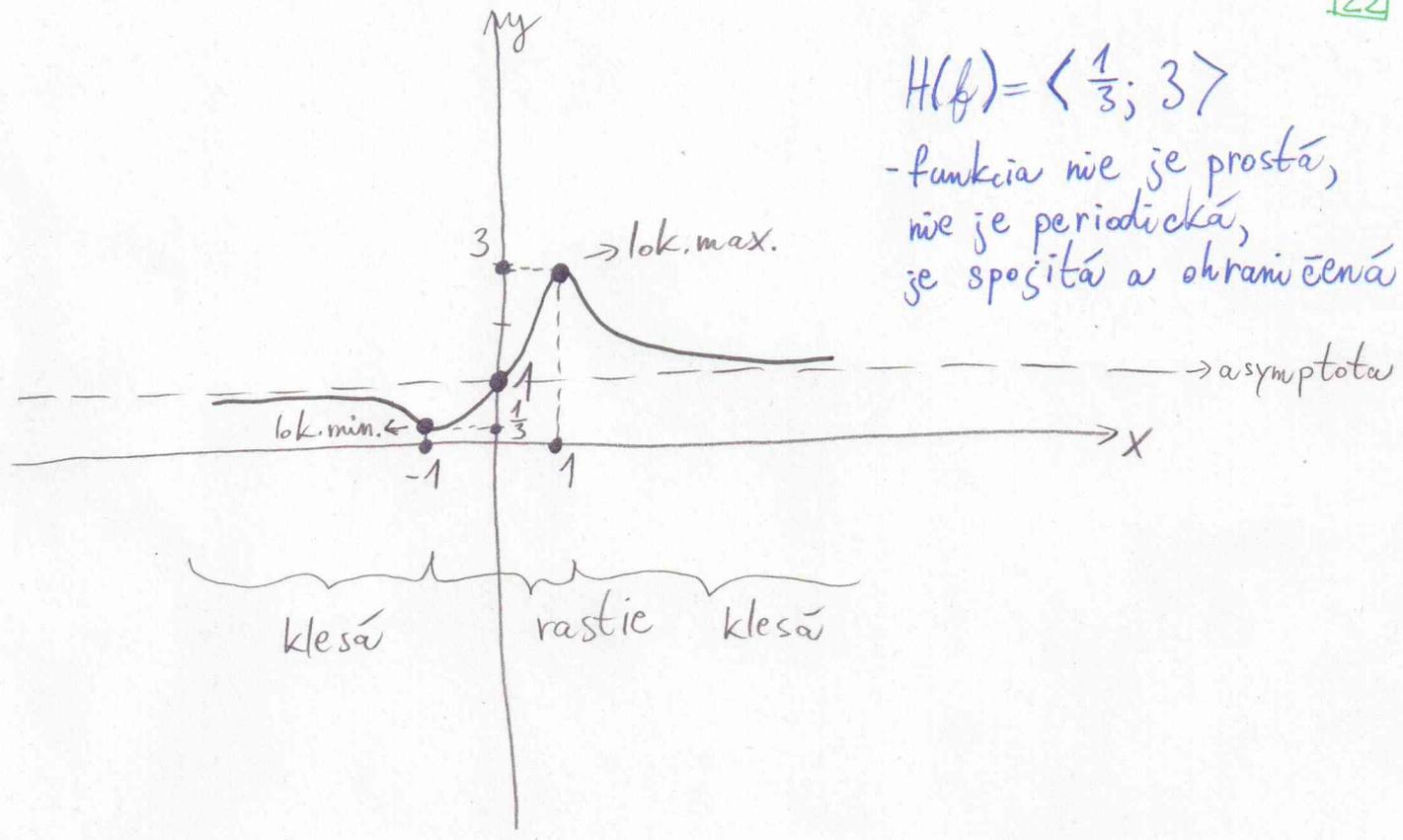
jeho hodnota je: $y(-1) = \frac{1 + (-1) + (-1)^2}{1 - (-1) + (-1)^2} = \frac{1 - 1 + 1}{1 + 1 + 1} = \frac{1}{3}$

⇒ funkcia má v bode $[-1; \frac{1}{3}]$ lok. minimum

$$y''(1) = \frac{4 \cdot 1^3 - 12 \cdot 1 + 4}{(1 - 1 + 1^2)^3} = \frac{4 - 12 + 4}{1} = -4 < 0 \Rightarrow \text{lok. maximum}$$

jeho hodnota je: $y(1) = \frac{1 + 1 + 1^2}{1 - 1 + 1^2} = \frac{3}{1} = 3$

⇒ funkcia má v bode $[1; 3]$ lok. maximum



2016 B1

$$a) \int \frac{1}{\cos 2x + \sin^2 x} dx = \int \frac{1}{\cos^2 x - \sin^2 x + \sin^2 x} dx =$$

$$\boxed{\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \text{ vzorec}}$$

$$= \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \underline{\underline{\text{tg } x + c; c \in \mathbb{R}}}$$

$$b) \int x \ln^2 x dx = \left| \begin{array}{l} w = \ln^2 x \quad v' = x \\ \text{Per Partes} \quad w' = 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} \quad v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{x^2}{2} \cdot \ln^2 x - \int 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2}{2} dx$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln^2 x - \int x \cdot \ln x dx = (*)$$

$$\int x \ln x dx = \left. \begin{array}{l} u = \ln x \quad v' = x \\ \text{Per partes} \quad u' = \frac{1}{x} \quad v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2}{2} dx =$$

24

$$= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + c = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + c$$

$$\Rightarrow \textcircled{*} = \frac{x^2}{2} \ln^2 x - \left(\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} \right) + c = \frac{x^2}{2} \ln^2 x - \frac{x^2}{2} \ln x + \frac{x^2}{4} + c; \quad c \in \mathbb{R}$$

$$c) \int \frac{4x+3}{(x-2)^3} dx = \left. \begin{array}{l} \text{substitúcia} \\ x-2=t \\ dx=dt \\ x=t+2 \end{array} \right| = \int \frac{4 \cdot (t+2) + 3}{t^3} dt =$$

25

$$= \int \frac{4t+8+3}{t^3} dt = \int \frac{4t+11}{t^3} dt = \int \frac{4t}{t^3} dt + \int \frac{11}{t^3} dt =$$

$$\frac{1}{x} = x^{-1} \quad \text{vzorec} = 4 \cdot \int \frac{1}{t^2} dt + 11 \cdot \int \frac{1}{t^3} dt = 4 \cdot \int t^{-2} dt + 11 \cdot \int t^{-3} dt =$$

$$= 4 \cdot \frac{t^{-1}}{-1} + 11 \cdot \frac{t^{-2}}{-2} + c = -\frac{4}{t} - \frac{11}{2t^2} + c =$$

$$= -\frac{4}{x-2} - \frac{11}{2 \cdot (x-2)^2} + c; \quad c \in \mathbb{R}$$

spätná subst.

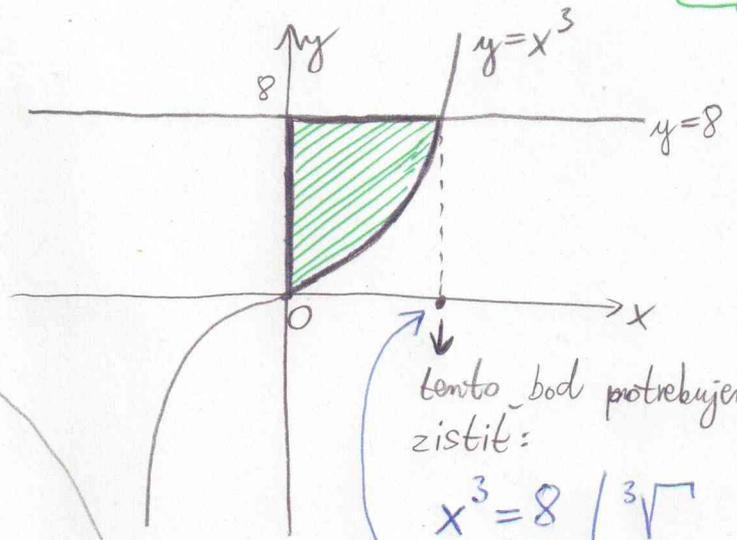
2016 B2

26

$$y = x^3$$

$$y = 8$$

$x = 0 \rightarrow y$ -ová os



tento bod potrebujeme
zistiť:

$$x^3 = 8 \quad | \sqrt[3]{}$$

$$x = 2$$

2

$$S = \int_0^2 (8 - x^3) dx = \left[8x - \frac{x^4}{4} \right]_0^2 =$$
$$= 8 \cdot 2 - \frac{2^4}{4} - \left(8 \cdot 0 - \frac{0^4}{4} \right) =$$
$$= 16 - \frac{16}{4} = 16 - 4 = \underline{\underline{12}}$$